Μάθημα 14ο /

20/04/18

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό

f μιγ. διαφ. στο $z_0 \iff \exists\ f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$\iff f = u + iv$ $\mathbb{R}$- διαφ. στο $z_0 = x_0 + iy_0$

δηλ. $\exists\ D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

Και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Rieman

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Τότε $f'(x_0+iy_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$

Είδαμε χθες:

$(e^z)' = e^z \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$

$(\log z) = \frac{1}{z} \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$

Παράδειγμα

$$(z^\lambda)' = \left(e^{\lambda \log z}\right)' = e^{\lambda \log z}(\lambda \log z)' =$$

$$= e^{\lambda \log z} \cdot \lambda (\log z)' = e^{\lambda \log z} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{z} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$$

και $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow (z^\lambda)' = \lambda z^{\lambda - 1}$.

Παράδειγμα 1

$$(a^z)' = \left(e^{z \log a}\right)' = e^{z \log a} \cdot (z \log a)' =$$

$$= e^{z \log a} \cdot \log a = a^z \log a.$$

Άσκηση 1

Εξετάστε τη μιγαδική διαφορισιμότητα της συνάρτησης της απόλυτης τιμής και του κύριου ορίσματος.

ΛΥΣΗ

$z \to \underbrace{|z|}_{\in \mathbb{R}}$, $z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο :

$\in \mathbb{R} \approx = \sqrt{x^2+y^2}$

$$: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } z = x + iy$$

$$\text{με } D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

αλλά όχι CR ενώ στο σημείο $(0,0)$

το $\binom{u}{v}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ $\nexists$

$\Rightarrow \nexists \ \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$ και $\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}$ στο $(0,0)$

$\Rightarrow$ δεν είναι η $\binom{u}{v}$ $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Επίσης η $z \longmapsto \operatorname{Arg} z$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

και αν $z = x+iy$, για $x>0$, ορίζεται

ως $\operatorname{Arg}(x+iy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \mathbb{R}$

και το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο, είναι

$$\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \arctan\frac{y}{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x>0$$

όπου $\nabla \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$

$\Rightarrow$ όχι μιγαδικά διαφορίσιμη για $x>0$

Οι εξισώσεις CR δεν ισχύουν για

$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ με $x>0$

Αντίστοιχα για το $2^{ο}$ και $3^{ο}$ τεταρτημόριο καθώς και για θετικό και αρνητικό ημιάξονα φανταστικών.

<u>Ερώτηση</u> Ποιες $\mathbb{R}$-γραμμικές μιγαδικές συναρτήσεις είναι μιγαδικά διαφορίσιμες.

Έστω $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ τότε το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο είναι το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ το οποίο είναι γραμμικό αν και μόνο αν

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Την αντίστοιχη f ονομάζουμε <u>$\mathbb{R}$-γραμμική</u>

$$f(x+iy) = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y) \quad \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$$

$$= \underbrace{(\alpha + i\gamma)}_{=a} + \underbrace{(\beta + i\delta)}_{=b} y$$

$$\Longleftrightarrow f(z) = a\,\frac{z+\bar{z}}{2} + b\,\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

$$= \underbrace{\frac{a-ib}{2}}_{=\lambda} z + \underbrace{\frac{a+ib}{2}}_{=\mu} \bar{z}$$

$y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Απο αυτές είναι μιγαδικά διαφορίσιμες μόνο αυτές για τις οποίες $\alpha = \delta$, $\gamma = -\beta$ (CR)

Αν θέσουμε $\alpha = \delta$, $\gamma = -\beta$ στον τύπο της f έχουμε $f(x+iy) = (\alpha + i\gamma)x + \underbrace{(-\gamma + i\alpha)}_{\substack{= i^2\gamma + i\alpha \\ = i(i\gamma + \alpha)}} y =$

$= (\alpha + i\gamma)(x+iy)$

$= \alpha z$

$= \lambda z$

$\left(\text{αφού } \lambda = \frac{\alpha - ib}{2} = \alpha \quad \text{και } \mu = \frac{\alpha + ib}{2} = 0 \right)$

$\Longrightarrow$ Από τις $\mathbb{R}$-γραμμικές συναρτήσεις

$f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά

διαφορίσιμες μόνο οι $\mathbb{C}$-γραμμικές, δηλ,

$f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Παρατήρηση | Αφού f μιγαδικά διαφορίσιμη $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ $\mathbb{R}$- διαφ στο (x_0, y_0) με

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{matrix}\right\} \underline{C-R}$$

αν $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) - A\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

όπου $A = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0) - \mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}{|z-z_0|} = 0$$

και επίσης οι μιγαδικά διαφορίσιμες είναι αυτές με $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$

Βλέπουμε και με αυτόν τον τρόπο ότι αναγκαία και ικανά θα πρέπει $\mu = 0$

Υπενθύμιση | Το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, διαφορίσιμο στο (x_0,y_0) έχει παράγωγο $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

και η γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί σε αυτήν ονομάζεται <u>διαφορικό</u> του $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ στο (x_0,y_0)

$$(x,y) \longmapsto \underbrace{D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: d\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} (x,y)$$

και αν εκφράσουμε το διανυσματικό πεδίο $\binom{u}{v}$ ως μιγαδική συνάρτηση f το διαφορικό της f στο z_0 γράφεται

$$\boxed{df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}}, \text{ δηλ. } d\binom{u}{v}_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

μια $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση.

Αν η f είναι μιγ. διαφ. στο z_0, τότε

$$df_{z_0}(z) = \lambda z = f'(z_0)\, z.$$

δηλ. $df_{z_0} = \underbrace{f'(z_0)}_{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Υπενθύμιση: $z \longmapsto \lambda z$

$$\begin{array}{ccc} z & \longmapsto & \lambda z \\ \updownarrow & & \parallel \\ (x,y) & & (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) \\ & & \updownarrow \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Παρατήρηση

Αφού $f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{v(x,y)}_{\in \mathbb{R}}$

Γράφουμε: $\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = f_x(x+iy) = \partial_x f(x+iy) := u_x(x,y) + i v_x(x,y)$

σύντομα: $\boxed{f_x = u_x + i v_x}$ και αντιστοιχεί

$$f_y = u_y + i v_y$$

Για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ αυτές

μιας μιγ. συνάρτησης ισχύει η άλγεβρα των παραγώγων

και εάν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη, τότε

$$f'(x_0+iy_0) \left(= \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \text{ με } D\binom{u}{v}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ και άρα} \right)$$

$$= \underbrace{u_x(x_0,y_0)} + i\underbrace{v_x(x_0,y_0)} = \overset{-i^2}{1} \cdot v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0) = -i\left(u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)\right)$$

$$= v_y(x_0,y_0) \quad -u_y(x_0,y_0) \; (CR)$$

δηλ $\boxed{f'(x_0+iy_0) = f_x(x_0+iy_0) = -i f_y(x_0+iy_0)}$

Εισάγοντας τους τελεστές

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

και $\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ δηλ

Διαπιστώνουμε ότι η $f'(z_0) = \partial f(z_0)$ και οι

εξισώσεις CR οι οποίες είναι $\begin{matrix} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow (u_x, v_x) = (v_y, -u_y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Leftrightarrow u_x + iv_x = v_y - iu_y \in \mathbb{C}$$
$$= -i(u_y + iv_y)$$

$\Leftrightarrow f_x = -i f_y$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$

Άρα, με αυτούς τους τελεστές έχουμε ότι

f μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{\bar{\partial} f(z_0) = 0}}_{CR}$ και τότε $f'(z_0) = \partial f(z_0)$

αν f $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0

ή αλλιώς:

ΠΡΟΤΑΣΗ

$f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, ολόμορφη

$\Leftrightarrow$ f $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο D και $\underbrace{\bar{\partial} f = 0}_{\text{εξισώσεις CR}}$ στο D

και τότε $f' = \partial f$

Αυτό οδηγεί στον ορισμό:

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, <u>αντιολόμορφη</u>, αν

$\partial f = 0$ στο D και τότε $\bar{\partial} f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>παράγωγος της f ως προς το $\bar{z}$</u>

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\underbrace{f}_{u+iv}$ αντιολόμορφη $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\bar{f}}_{u-iv}$ ολόμορφη

Τότε: $\bar{\partial} f = \overline{\bar{f}'}$

<u>Αν:</u>

$f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ σταθ. $\Rightarrow$ $\bar{\partial} c = 0$, $\partial f = 0$

$f(z) = z$ $\quad$ $\bar{\partial} z = 0$, $\partial z = 1$

$f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ $\quad$ $\bar{\partial}(z^n) = 0$, $\partial z = n z^{n-1}$

$-n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$f(z) = \bar{z}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{f}(z) = z$ είναι ολόμορφη, δηλαδή η $f(z) = \bar{z}$ είναι αντιολόμορφη, δηλ $\partial \bar{z} = 0$

και $\bar{\partial} \bar{z} = 1$

γενικότερα: $f(z) = \bar{z}^n \Rightarrow \partial(\bar{z}^n) = 0$, $\bar{\partial}(\bar{z}^n) = n \bar{z}^{n-1}$

και επειδή για τα $\partial, \bar{\partial}$ ισχύει η άλγεβρα των παραγώγων έχουμε

$$\bar{\partial}(z^n \cdot \bar{z}^m) = \underbrace{\bar{\partial}(z^n)}_{=0} \bar{z}^m + (\bar{\partial} \bar{z}^m) z^n = m z^n \bar{z}^{m-1}$$

και $\partial(z^n \bar{z}^m) = n\bar{z}^m z^{n-1}$

$\Rightarrow z^n \bar{z}^m$ ούτε ολόμορφη

ούτε αντιολόμορφη.